Probabilités
L2 de Mathématiques année 2018 – 19
Université Paris 13

Partiel n°2 – Lundi 14 janvier 2018

Durée : 2h.
Les calculatrices, documents, téléphones portables, etc., sont interdits.

La clarté et la précision des raisonnements et énoncés entreront pour une part importante dans la notation. Les réponses non justifiées ne seront pas prises en compte. Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre que vous souhaitez.

Dans toute la feuille $(\Omega, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé.

Exercice 1. Questions de cours [7 points].

1. Soit $p \in [0,1]$. Soit X une variable aléatoire de loi de Bernoulli de paramètre p. Rappeler la définition de cette loi. *Calculer* l'espérance et la variance de X.
2. Soit $\lambda > 0$. Soit Y une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λ.
   (a) Rappeler la définition de cette loi.
   (b) Montrer que $Y \in L_1(\Omega)$ et *calculer* son espérance.
   (c) Donner (sans démonstration) la valeur de sa variance.
3. Soit $p \in]0,1[$. Soit Z une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre p. Reprendre les questions (a), (b), (c) de la question précédente en remplaçant Y par Z.
4. Donner la définition de l'indépendance de deux variables aléatoires.

Rappel : vous pourrez utiliser l'égalité $\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$, valable pour tout $q \in]-1,1[$.

Exercice 2 [6 points]. On tire une carte uniformément au hasard dans un jeu de 32 cartes. On rappelle qu'un tel jeu comporte quatre couleurs de cartes (pique, cœur, carreau, trèfle) et que chaque couleur est composée de huit cartes numérotées (7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi, As). Soit X la variable aléatoire définie par :

- $X = -1$ si la carte tirée est un 7, un 8, un 9 ou un 10 ;
- $X = 1$ si la carte tirée est un Valet, une Dame ou un Roi ;
- $X = 2$ si la carte tirée est un As.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.
3. Calculer $\mathbb{P}(X \geq 0)$, puis $\mathbb{P}(X = 2 | X \geq 0)$.
4. On pose $Y = 2X - 1$. Calculer l'espérance et la variance de Y.

Exercice 3 [7 points + 3 points de bonus si la question 6 est faite]. Soit $p \in]0,1]$. On considère un couple de variables aléatoires (X, Y) à valeurs dans $\mathbb{N} \times \{0,1\}$ de loi définie par :

$$\mathbb{P}(X=0, Y=0) = 1-p, \qquad \mathbb{P}(X=0, Y=1) = e^{-p} - (1-p)$$
$$\mathbb{P}(X=k, Y=0) = 0, \qquad \mathbb{P}(X=k, Y=1) = e^{-p}\frac{p^k}{k!} \qquad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*.$$

On note $\mathcal{C}(p)$ cette loi sur $\mathbb{N} \times \{0,1\}$.

1. Déterminer la loi de X et la loi de Y.
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Montrer que $\mathbb{P}(X = Y) \geq 1 - p^2$.
4. Soit $\lambda > 0$ et n un entier, $n \geq \lambda$. Soient $(X_i, Y_i), 1 \leq i \leq n$, n couples de variables aléatoires indépendants, tous de loi $\mathcal{C}(\lambda/n)$. Sans faire de calculs (mais en argumentant votre réponse) :
   (a) Donner le nom de la loi de $P_n := X_1 + ... + X_n$.
   (b) Donner le nom de la loi de $B_n := Y_1 + ... + Y_n$.

   Indication : vous pourrez utiliser que $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes ; et de même $Y_1, \dots, Y_n$ sont indépendantes.
5. On admet pour l'instant la majoration suivante :
$$\sup_{A \subset \mathbb{N}} |\mathbb{P}(B_n \in A) - \mathbb{P}(P_n \in A)| \leq \frac{\lambda^2}{n}. \tag{1}$$
   En déduire l'"approximation binomiale – Poisson" vue en cours.

———— Fin du partiel ————

6. **Question Bonus (3 points) - démonstration de l'inégalité (1).**
   (a) Soient S et T des variables aléatoires quelconques à valeurs dans $\mathbb{N}$. Soit $A \subset \mathbb{N}$, montrer que
$$\mathbb{P}(S \in A) \leq \mathbb{P}(T \in A) + \mathbb{P}(S \neq T).$$
   En déduire que
$$|\mathbb{P}(S \in A) - \mathbb{P}(T \in A)| \leq \mathbb{P}(S \neq T).$$
   (b) En déduire (1).